Контрольная работа
«Векторная алгебра»

Если известны координаты точек $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}\{b_1 - a_1;\ \ b_2 - a_2;\ \ b_3 - a_3\} = \vec{a}\{x;\ y;\ z\}$.

Разложение этого вектора по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Длина вектора находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а направляющие косинусы равны $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|}$. Орт вектора $\vec{a}^{\,o} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

Пример 8. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$.

Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$. Найдем координаты векторов:
$\overrightarrow{AC}\{7-1;\ 6-7;\ \ 5-0\} = \overrightarrow{AC}\{6;\ -1;\ 5\}$ и $\overrightarrow{BC}\{7-5;\ \ 6-7;\ \ 5-3\} = \overrightarrow{BC}\{2;\ \ -1;\ \ 2\}$.
Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \ -\overrightarrow{BC} = \vec{a}\{6-2;\ \ -1-(-1);\ \ 5-2\} = \vec{a}\{4;\,0;\,3\}$, $\quad |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$,
$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\quad \cos\gamma = \dfrac{3}{5}$, $\ \vec{a}^{\,0}\left\{\dfrac{4}{5};\,0;\,\dfrac{3}{5}\right\}$.

Контрольные варианты к задаче 8. Даны точки A, B и C. Разложить вектор $\vec{a}$ по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec{a}$.

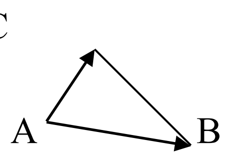
1. $A(1;\,2;\,-1)$, $B(1;\,3;\,4)$, $C(0;\,1;\,5)$,
   $\vec{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
2. $A(1;\,2;\,-1)$, $B(1;\,3;\,4)$, $C(0;\,1;\,5)$,
   $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

Задача 9. Если даны векторы $\vec{a}\,\{a_1;\,a_2;\,a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1;\,b_2;\,b_3\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Тогда $\cos \widehat{\vec{a},\ \vec{b}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$; проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ $\ пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$, условие перпендикулярности ненулевых векторов выглядит следующим образом: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Пример 9. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 4;\ 1)$, $C(6;\ 13;\ 1)$. Найти угол при вершине A и проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону AC.
Внутренний угол при вершине A образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$,



$\overrightarrow{AB}\{5-1;\ 4-1;\ 1-1\}=\overrightarrow{AB}\{4,\ 3,\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}\ \{5;\ 12;\ 0\}$.

Тогда $\cos\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot5+3\cdot12+0=56$, $\overrightarrow{AB}==\sqrt{4^2+3^2}=5$,

$\overrightarrow{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$. $\cos\angle A=\dfrac{56}{5\cdot13}=\dfrac{56}{65}$.

Проекция $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$: $пр_{\overline{AC}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{56}{13}$.

Контрольные варианты к задаче 9

1. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{a}+\vec{b}}\,\vec{b}$.

2. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{b}=10\vec{i}-2\sqrt{2}\cdot\vec{j}-6\vec{k}$ и осью OZ.

3. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a}=-6\vec{i}-5\vec{k}$ и $\vec{b}\{5;\ \sqrt{3};\ 6\}$. Вычислить $пр_{\vec{b}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

5. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и осью ОУ.

6. Даны векторы $\vec{a}=\{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a}+\vec{b}$ и осью ОХ.

7. Даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$. Найти $пр_{\overline{AC}}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$.

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

9. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

10. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ перпендикулярны.

11. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}\{1;\ \alpha;\ 2\}$ взаимно перпендикулярны.

12. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине B.

13. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине A.

14. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$.

15. Даны две точки $M(-5;\ 7;-6)$ и $N(7;\ -9;\ 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}\{\ 1,\ -3,\ 1\}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

16. Даны векторы: $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить $пр_{\vec{a}+2\vec{b}}\,\vec{b}$.

17. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$.

18. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;\ -6;\ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

19. Даны три вектора: $\vec{a}\{1; -3;\ 4\}$, $\vec{b}\{\ 3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

20. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

21. Даны три вектора: $\vec{a}\{3; -6; -1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4; -5\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $пр_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c})$.

22. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{j}$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

23. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{b} = 6$.

24. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

25. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

26. Дан вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и точки $M(3;\ -1;\ 2)$ и $N(4;\ -2;\ 1)$. Найти $пр_{\overline{MN}}\vec{a}$.

27. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1; 1;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$. Определить внутренний угол при вершине A.

28. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{b}\{2;\ -2;\ 1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

29. Даны вершины треугольника: $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону $\overrightarrow{AC}$.

30. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} + \vec{c}$ на вектор $\vec{b} + \vec{c}$.

Задача 10. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле $S_п = |\vec{a} \times \vec{b}|$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Пример 10. Даны вершины треугольника $A(1; 2;\ 0)$, $B(3;\ 0; -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Найти его площадь и длину высоты, опущенной из вершины C.

$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\{3-1;\ 0-2;\ -3-0\} = \overrightarrow{AB}\{2, -2, -3\},\quad \overrightarrow{AC}\{5-1;\ 2-2;\ 6-0\} = \overrightarrow{AC}\{4, 0, 6\}.$$

Векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-12+0)-\vec{j}\cdot(12+12)++\vec{k}\cdot(0+8)=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{784}=28,\quad S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

Так как $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h$, где h – длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, $h=\frac{2\cdot S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, $h=\frac{2\cdot 14}{\sqrt{17}}=\frac{28\cdot\sqrt{17}}{17}$.

Контрольные варианты к задаче 10

1. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD}\{2;\ 1;\ -2\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма ABCD.

2. Даны три вершины параллелограмма $A(3;\ -2;\ 4)$, $B(4;\ 0;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь параллелограмма).

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 6)$, $C(2;\ 5;\ 1)$ (средствами векторной алгебры).

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5;\ 2;\ 7)$, $B(6;\ 1;\ 9)$, $C(5;\ 2;\ 8)$ (средствами векторной алгебры).

5. Даны три вершины треугольника: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(2;\ -1;\ 1)$. Найти его высоту, приняв BC за основание (через площадь треугольника).

6. На векторах $\vec{a}\left\{1;\ 1;\ \frac{3}{2}\right\}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\frac{9}{2}\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются диагонали данного параллелограмма.

7. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 3;\ -3\}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая.

8. Даны точки $A(2;\ -1;\ -4)$, $B(5;\ 1;\ 2)$, $C\left(\frac{11}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})$.

9. На векторах $\vec{a}\{4;\ 7;\ 3\}$ и $\vec{b}\{1;\ 2;\ 1\}$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную на основание $\vec{b}$ (через площадь).

10. В треугольнике ABC, где $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$, $C(-1;\ 10;\ 7)$, найти длину высоты, опущенной на сторону AB (через площадь треугольника; средствами векторной алгебры).

11. На векторах $\vec{a}(-2;\ -2;\ -3)$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма.

12. В треугольнике с вершинами $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$ и $C(-1;\ 10;\ 7)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

13. Найти площадь параллелограмма со сторонами $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

14. Найти площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{j}+3\vec{k}$.

15. Дан треугольник с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины A (средствами векторной алгебры).

16. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}$. Найти вектор $\vec{d}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длина его численно равна площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ – правая.

17. Даны точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины C (средствами векторной алгебры).

18. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника BCE (средствами векторной алгебры).

19. Даны точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

20. Даны три вершины треугольника: $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить его высоту, опущенную из вершины B (через площадь, средствами векторной алгебры).

21. Дан треугольник с вершинами $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$ и $C(-1;\ 2;\ 1)$. Найти его высоту, опущенную из вершины A (через площадь, средствами векторной алгебры).

22. Даны векторы $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{b}-\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{b}$.

23. Даны векторы $\vec{b}\{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}-\vec{b}$ и $3\vec{b}-\vec{a}$.

24. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}+3\vec{a}$ и $2\vec{a}$, где $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

25. В треугольнике с вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

26. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$. Найти вектор $\vec{c}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – левая.

27. Даны точки $A(5;\ -1;\ 3)$, $B(0;\ -2;\ 1)$ и $C(3;\ 2;\ 4)$. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины С (через площадь, средствами векторной алгебры).

28. Даны три вершины параллелограмма $A(-1;\ -2;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 3)$ и $C(-3;\ 0;\ 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины С (через площадь, средствами векторной алгебры).

29. На векторах $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b} = 2\vec{k} - 3\vec{i} + \vec{j}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}$ и $\vec{b} + 3\vec{c}$.

Задача 11. Если даны координаты $\bar{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\bar{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\bar{c}(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то смешанное произведение векторов вычисляют по формуле

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объемы параллелепипеда и тетраэдра (треугольной пирамиды), построенных на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ находятся с помощью смешанного произведения векторов:

$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\quad V_{\text{тет}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - правая.

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, то тройка левая.

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны.

Пример 11. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB}\{4;\ 3;\ 0\}$, $\overline{AD}(2;\ 1;\ 2\}$ и $\overline{AA'}\{-3;\ -2;\ 5\}$. Найти высоту, проведенную из вершины A' на грань ABCD.

Объем $V_{\text{пар}}$ равен произведению площади основания на высоту:

$$V_{\text{пар}} = S\cdot h = \left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|\cdot h.$$

$V_{\text{пар}}$ находится также по формуле $V_{\text{пар}} = \left|\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AA'}\right|$, поэтому

$$h=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}.$$

Вычислим векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&0\\2&1&2\end{vmatrix}=$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}3&0\\1&2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}4&0\\2&2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}=6\vec{i}-8\vec{j}-2\vec{k}=\{6;-8;-2\}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{6^2+(-8)^2+(-2)^2}=2\sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}=\begin{vmatrix}4&3&0\\2&1&2\\-3&-2&5\end{vmatrix}=-12,\quad \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA}\right|=|-12|=12.$$

Тогда $h=\dfrac{12}{2\sqrt{26}}=\dfrac{12\cdot\sqrt{26}}{2\cdot 26}=\dfrac{3\sqrt{26}}{13}.$

Контрольные варианты к задаче 11

1. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}\{1;\ 3;\ 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;\ 1;\ -1\}$ и $\overrightarrow{AD}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-1;\ 4;\ 1)$, $B(0;7;1)$, $C(1;\ 3;\ 5)$, $D(0;\ 6;\ -1)$.

3. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a}\{2;\ -1;\ 5\}$, $\vec{b}\{t;\ 4;\ 2\}$ и $\vec{c}=\{1;\ 0;\ -1\}$ образуют левую тройку, а объем параллелепипеда, построенного на них, равен 33.

4. Даны векторы $\vec{a}=t\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}\{1;-1;0\}$, $\vec{c}=\vec{k}$. Найти значение t, при котором выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}$.

5. Точки $A(2;\ 3;\ t)$, $B(3;\ -1;\ -2)$, $C(1;\ 4;\ 0)$ и $Д(1;3;2)$ лежат в одной плоскости. Найти t .

6. Найти объем параллелепипеда, зная четыре его вершины: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ и $D(3;\ 4;-1)$.

7. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a}=t\vec{i}+t\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}\{-1;\ 3;\ t\}$ компланарны.

8. Точки $A(-2;\ 1;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 4)$, $C(5;\ 6;\ 0)$ и $E(5;\ 6;\ t)$ служат вершинами параллелепипеда, объем которого равен 16. Найти t.

9. Даны векторы $\vec{a}\{-2;\ -2;\ 2\}$ $\vec{b}\{1;\ -1;\ 1\}$ и $\vec{c}=5\mathrm{i}-0{,}5\vec{j}+t\vec{k}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

10. Векторы $\vec a = t\vec i + 2\vec j + 3\vec k$, $\vec b = 5\vec j + 7\vec k$ и $\vec c = -\vec i + 3\vec j + 4\vec k$ компланарны. Найти t.

11. Даны векторы $\vec a\{1;\ t;\ -1\}$, $\vec b = 2\vec i + \vec j + 3\vec k$ и $\vec c = -\vec j - 5\vec i$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec a \times \vec b \cdot \vec c = \vec a \cdot \vec b - \vec b \cdot \vec c + \vec a \cdot \vec c$.

12. Даны векторы $\vec a\{-2;\ 3;\ t\}$ $\vec b = 4\vec i - 4\vec j + 2\vec k$, $\vec c = 4\vec k + \vec j$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c = |\vec b|$.

13. Векторы $\vec a\{1;\ -3;\ 1\}$ $\vec b\{3;\ 2;\ -2\}$ и $\vec c = t\vec i + 4\vec j - \vec k$ образуют правую тройку, причем объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен девяти. Найти t.

14. Векторы $\vec a = 6\vec i + \vec j + 5\vec k$, $\vec b = 3\vec i - 2\vec j + 7\vec k$ и $\vec c$ образуют левую тройку и служат ребрами параллелепипеда, объем которого равен 45. Вектор $\vec c$ перпендикулярен плоскости XOY. Найти отличную от нуля координату вектора $\vec c$.

15. Векторы $\vec a\{3;\ 4;\ t\}$ $\vec b\{0;\ -3;\ 1\}$ и $\vec c = 2\vec i + 5\vec k$ образуют левую тройку. Объем построенного на них параллелепипеда равен 51. Найти t.

16. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 3;\ 3)$, $C(4;\ 5;\ 4)$ и $D(5;\ 5;\ 6)$.

17. Объем треугольной пирамиды равен пяти. Три его вершины находятся в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. Найти отличную от нуля координату четвертой вершины D, если она лежит на оси ОУ.

18. Точки $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(3;\ -1;\ -2)$ и $D(2;\ 3;\ t)$ лежат в одной плоскости. Найти t.

19. Найти значение t, при котором векторы $\vec a\{t;\ 3;\ 2\}$, $\vec b\{2;\ -3;\ -4\}$ и $\vec c\{-3;\ 12;\ 6\}$ компланарны.

20. Проверить, лежат ли точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ и $D(5;\ 0;\ -6)$ в одной плоскости.

21. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;\ 1;\ 5)$, $B(-1;\ 3;\ 0)$, $C(4;\ 5;\ -2)$ и $D(1;\ -1;\ 6)$.

22. Даны векторы $\vec a\{1;\ 2;\ t\}$, $\vec b\{1;\ -3;\ 2\}$ и $\vec c = -2\vec i + \vec k$. Найти t, при котором имеет место равенство $\vec a \times \vec b \cdot \vec c = |\vec c|^2$.

23. Векторы $\vec a\{1;\ 1;\ t\}$, $\vec b\{2;\ 1;\ 1\}$, $\vec c = \vec i - 2\vec j + 3\vec k$ образуют правую тройку. Объем построенной на них треугольной пирамиды равен $5/3$. Найти t.

24. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0;-2;\ 5)$, $B(6;\ t;\ 0)$, $C(3;\ -3;\ 6)$ и $D(2;\ -1;\ 3)$. Найти значение t, если объем пирамиды равен 45.

25. Даны векторы $\vec a\{1;\ -1;\ 1\}$, $\vec c\{5;\ t;\ 2\}$, $\vec b = -2\vec i - 2\vec j + 2\vec k$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec a \times \vec b \cdot \vec c = |\vec b| \cdot |\vec a|$.

26. Даны векторы $\vec a = 3\vec i + 4\vec k$, $\vec b = \vec j + 2\vec k$ и $\vec c = \vec i - \vec j + t\vec k$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec a \times \vec b \cdot \vec c = |\vec a|$.

27. Определить, при каком значении t векторы $\vec a = \vec i + \vec j$, $\vec b = \vec j - \vec k$, $\vec c = t\vec i - \vec j + \vec k$ компланарны.

28. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 5;\ 0\}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+t\vec{k}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2$.

29. Векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+t\vec{j}$, $\vec{c}\{3;\ 0;\ 1\}$ образуют правую тройку, а объем построенного на них параллелепипеда равен 12. Найти значение t.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ t;\ 1\}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Задача № 12. Пусть вектор $\vec{a}=\alpha\vec{m}+\beta\vec{n}$, причем векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ не образуют декартовый базис. Пусть известны $|\vec{m}|$, $|\vec{n}|$, $\widehat{\vec{m},\ \vec{n}}$ тогда

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{(\alpha\vec{m}+\beta\vec{n})^2}=\sqrt{\alpha^2\cdot\vec{m}^2+2\alpha\cdot\beta\cdot\vec{m}\cdot\vec{n}+\beta^2\cdot\vec{n}^2}=$$

$$=\sqrt{\alpha^2|\vec{m}|^2+2\alpha\beta|\vec{m}||\vec{n}|\cos\widehat{\vec{m}\cdot\vec{n}}+\beta^2|\vec{n}|^2}.$$

Если векторы $\vec{a}=\alpha_1\vec{m}+\beta_1\vec{n}$ и $\vec{b}=\alpha_2\vec{m}+\beta_2\vec{n}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\alpha_1\vec{m}+\beta_1\vec{n})\cdot(\alpha_2\vec{m}+\beta_2\vec{n})=\alpha_1\cdot\alpha_2\vec{m}^2+\alpha_1\cdot\beta_2\vec{m}\cdot\vec{n}+\beta_1\cdot\alpha_1\vec{n}\cdot\vec{m}+\beta_1\cdot\beta_2\vec{n}^2=$$
$$=\alpha_1\cdot\alpha_2\vec{m}^2+(\alpha_1\cdot\beta_2+\alpha_2\cdot\beta_1)\vec{m}\cdot\vec{n}+\beta_1\cdot\beta_2\vec{n}^2=$$
$$=\alpha_1\cdot\alpha_2|\vec{m}|^2+(\alpha_1\cdot\beta_2+\alpha_2\cdot\beta_1)|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\ \cos\widehat{\vec{m}\cdot\vec{n}}++\beta_1\cdot\beta_2|\vec{n}|^2.$$

Пример 12. При каком ненулевом значении t вектор $\vec{a}=t\vec{m}+\vec{n}$ будет единичным, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=1$, $\widehat{\vec{m},\vec{n}}=2\pi/3$? Вектор будет единичным, если его длина будет равна единице, т. е. $|\vec{a}|^2=1$.

$$|\vec{a}|^2=(t\vec{m}+\vec{n})^2=t^2\vec{m}^2+2t\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2=$$
$$=t^2|\vec{m}|^2+2t|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\widehat{\vec{m},\vec{n}}+|\vec{n}|^2=1,$$
$$t^2+2t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=1,\quad t^2-t=0,\quad t\neq 0,\ \ t=1.$$

Контрольные варианты к задаче 12

1. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+2\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2. Найти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a}=\vec{s}-\vec{t}$, $\vec{b}=\vec{s}+5\vec{t}$, $|\vec{s}|=4$, $|\vec{t}|=2$, $(\widehat{\vec{s},\ \vec{t}})=\pi/3$.

3. Даны векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, найти $пр_{\vec{b}}\vec{a}$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}|=1/4$, $(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}})=\pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $|\vec{n}| = \frac{1}{4}$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \pi/4$.

5. При каком отличном от нуля значении параметра ℓ вектор $\vec{a} = \ell\vec{m} + 2\vec{n}$ будет единичным, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 1/2$, $(\vec{m}, \vec{n}) \overset{\wedge}{=} 2\pi/3$?

6. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}| = 1/4$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \pi/4$.

7. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{t} - 2\vec{s}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{s} - \vec{t}$ служат сторонами параллелограмма. Найти косинус угла между диагональю $\overrightarrow{BC}$ и стороной $\overrightarrow{AC}$, если $|\vec{s}| = \sqrt{3}$, $|\vec{t}| = \sqrt{6}$, $(\vec{s}, \wedge \vec{t}) = \pi/4$.

8. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{p} + \ell\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$. При каком значении параметра ℓ вектор $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{8}$, $(\vec{p}, \wedge \vec{q}) = 3\pi/4$?

9. В параллелограмме ABCD найти длину диагонали $\overrightarrow{BD}$, если

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}}{2}, \quad |\vec{a}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |\vec{b}| = \frac{1}{2}, (\vec{a}, \wedge \vec{b}) = \frac{5}{6}\pi.$$

10. В треугольнике ABC найти косинус внутреннего угла B, если $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 4\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = 3\pi/4$.

11. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, если

$$|\vec{m}| = \frac{1}{2\sqrt{2}}, |\vec{n}| = \frac{1}{4}, (\vec{m}, \wedge \vec{n}) = 3\pi/4.$$

12. При каком положительном значении параметра ℓ векторы $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \ell\vec{p} + 2\vec{q}$ имеют одинаковую длину, если $|\vec{p}| = \sqrt{3}$, $|\vec{q}| = 0{,}5$, $\vec{p} \perp \vec{q}$?

13. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}| = 1/4$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \pi/4$.

14. В треугольнике ABC найти длину $\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = \pi/6$.

15. Даны векторы $\vec{a} = 7\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = -2\vec{m} - \vec{n}$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$, если

$$|\vec{m}| = 1/(3\sqrt{2}), \quad |\vec{n}| = 1/4, \quad (\vec{m}, \wedge \vec{n}) = \pi/4.$$

16. Дан вектор $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18}$, $|\vec{n}| = 1/2$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = 3\pi/4$.

17. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}} 3\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18}$, $|\vec{n}| = 1/4$,, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = 3\pi/4$.

18. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{m} - \vec{a} \cdot \vec{n}$, $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}| = 1/4$, $(\vec{m}, \wedge \vec{n}) = 5\pi/4$.

19. Даны векторы $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{p}+\ell\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$. При каком значении параметра ℓ вектор $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=\sqrt{8}$, $(\vec{p}\,\widehat{,}\,\vec{q})=3\pi/4$?

20. Дано: $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=5$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=\frac{\pi}{3}$. При каком значении параметра α векторы $\vec{m}+\alpha\vec{n}$ и $2\vec{m}-\vec{n}$ взаимно перпендикулярны?

21. Дан вектор $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120^0. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{m}$.

22. Даны векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{a}-3\vec{m})$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{18}$, $|\vec{n}|=1/2$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=5\pi/4$.

23. Дан вектор $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{m}}(\vec{a}+\vec{n})$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}|=1/4$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=\pi/4$.

24. Даны векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$. Найти длину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{18}$, $|\vec{n}|=1/4$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=5\pi/4$.

25. Даны векторы $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{b}=3\vec{m}-\vec{n}$. Найти $3\vec{m}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{18}$, $|\vec{n}|=1/4$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=\pi/4$.

26. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, найти длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+3\vec{b}$.

27. При каком значении параметра $\alpha\neq0$ вектор $\vec{a}=\alpha\vec{p}+5\vec{q}$ будет единичным, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=1/2$, $(\vec{p}\,\widehat{,}\,\vec{q})=2\pi/3$?

28. При каком значении α векторы $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=\alpha\vec{a}+3\vec{b}$ имеют одинаковую длину, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b})=3\pi/4$?

29. В треугольнике ABC найти косинус внутреннего угла при вершине B, если $\overrightarrow{AB}=3\vec{m}-2\vec{n}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{m}-\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=\frac{1}{3}$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=120^0$.

30. Даны векторы $\vec{S}=2\vec{m}+\alpha\vec{n}$, $\vec{t}=3\vec{m}-2\vec{n}$. При каком значении параметра α вектор $\vec{S}\perp\vec{t}$, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $(\vec{m}\,\widehat{,}\,\vec{n})=3\pi/4$.

Задача 13. При решении этой задачи будем использовать свойства векторного произведения двух векторов. Модуль векторного произведения двух векторов $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}$, поэтому $|\vec{a}\times\vec{a}|=0$. По свойствам векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}\times\vec{c}+\beta\cdot\vec{b}\times\vec{c}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_n=|\vec{a}\times\vec{b}|$. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_T=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Пример 13. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 2\vec m - \vec n$ и $\overrightarrow{AD} = \vec m + 3\vec n$. Найти $\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec m| = 4$, $|\vec n| = \sqrt{2}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{6}$. Это условие в параллелограмме ABCD вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec m - \vec n + \vec m + 3\vec n = 3\vec m + 2\vec n$. Тогда $\overrightarrow{CA} = -2\vec n - 3\vec m$. Вектор $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec m + 3\vec n - 2\vec m + \vec n = 4\vec n - \vec m$;

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD} = (-2\vec n - 3\vec m) \times (4\vec n - \vec m) = -8\vec n \times \vec n + 2\vec n \times \vec m - 3\vec m \times 4\vec n + \vec m \times \vec m =$$

$$= 2\vec n \times \vec m + 12\vec n \times \vec m = 14\vec n \times \vec m;$$

$$\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD}\right| \left|14\vec n \times \vec m\right| = 14\,|\vec n| \cdot |\vec m| \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 14 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 28\sqrt{2}.$$

Контрольные варианты к задаче 13

1. На векторах $\vec a = 2\vec m - 5\vec n$ и $\vec b = 3\vec m + \vec n$ построен треугольник. Найти его площадь, если $|\vec m| = 1$, $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{6}$.

2. Даны векторы $\vec a = \vec m + 3\vec n$, $\vec b = 4\vec m - \vec n$ и $\vec c = 3\vec m + \vec n$. Найти модуль векторного произведения $(\vec a + \vec b) \times \vec c$, если $|\vec m| = 2$, , $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{6}$.

3. Даны векторы $\vec a = 2\vec m + \vec n$, $\vec b = \vec m + 2\vec n$. Найти $\left|\vec a \times \vec b + 5\vec m \times \vec n\right|$, если $|\vec m| = 1$, , $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{6}$.

4. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec m - 6\vec n$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec m + 2\vec n$. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec m| = 2$, , $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{6}$.

5. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec n - 0{,}5\vec m$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec m$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec m| = 3$, $|\vec n| = 2$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \frac{\pi}{4}$.

6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec a = 5\vec m + 2\vec n$ и $\vec b = 3\vec m + \vec n$, если $|\vec m| = 1,$ $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \pi/6$.

7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 5\vec n + 4\vec m$ и $\overrightarrow{AD} = 2\vec m - \vec n$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \pi/6$.

8. Даны векторы $\vec a = 3\vec m - 4\vec n$, $\vec b = \vec m + 12\vec n$, где $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = 1$, $\widehat{(\vec m,\ \vec n)} = \pi/4$. Найти $\left|\vec a \times (\vec a + \vec b)\right|$.

9. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec a + 5\vec b$ и $\overrightarrow{AD} = \vec a - 2\vec b$.

Найти $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec a| = \dfrac{\sqrt2}{4}$, $|\vec b| = \sqrt8$, $(\vec a,\hat{\ }\vec b) = \pi/3$.

10. Даны векторы $\vec a = \dfrac12\vec m + 4\vec n$ и $\vec b = -\vec m + 3\vec n$. Найти $\left|(\vec a + 2\vec b)\times\vec b\right|$, если $|\vec m| = 5$, $|\vec n| = 1$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/4$.

11. Даны векторы $\vec a = 2\vec m - \vec n$, $\vec b = 4\vec m - \vec n$, и $\vec c = \vec m + 2\vec n$. Найти $\left|(\vec a + \vec b)\times\vec c\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt3$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/6$.

12. Даны векторы $\vec a = 3\vec m - \vec n$, $\vec b = -\vec m + 2\vec n$. Найти $\left|\vec a\times\vec b + 5\vec m\times\vec n - 3\vec n\times m\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt3$, $(\vec m,\ \vec n) =\hat{\ }\pi/6$.

13. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec n - 0{,}5\vec m$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec m$. Найти $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt3$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = 5\pi/6$.

14. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -6\vec n + \vec m$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec m + 2\vec n$. Найти $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt3$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/6$.

15. Даны векторы $\vec a = 3\vec m + \vec n$ и $\vec b = \vec m - 3\vec n$. Найти $\left|\vec a\times\vec b + 3\vec m\times\vec n - 2\vec n\times\vec m\right|$, если $|\vec m| = 4$, $|\vec n| = \sqrt3$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/6$.

16. Даны векторы $\vec a = 4\vec m + \vec n$, $\vec b = 3\vec m + \vec n$. Найти $\left|\vec a\times(\vec b - \vec a)\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt{12}$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/6$.

17. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = -3{,}5\vec n + \vec m$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec n$. Найти $\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt{12}$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/6$.

18. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec n + 2\vec m$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec m + 2\vec n$. Найти $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec m| = 3$, $|\vec n| = \sqrt{12}$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/3$.

19. Даны векторы $\vec a = 3\vec p - \dfrac13\vec q$ и $\vec b = 2\vec p + \vec q$. Найти $\left|(5\vec a - 3\vec b)\times(\vec b - 4\vec a)\right|$, если $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p,\hat{\ }\vec q) = 5\pi/6$.

20. Даны векторы $\vec a = \dfrac12\vec m + 3\vec n$, $\vec b = \vec m + 2\vec n$. Найти $\left|(3\vec a + \vec b)\times\vec b\right|$, если $|\vec m| = 4$, $|\vec n| = 2$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/4$.

21. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 5\vec a + 7\vec b$ и $\overrightarrow{AD} = -3\vec a + \vec b$. Найти $\left|\overrightarrow{AC}\times(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})\right|$, если $|\vec a| = \sqrt3$, $|\vec b| = 3$, $(\vec a,\hat{\ }\vec b) = \pi/3$.

22. Даны векторы $\vec a = \vec m + \vec n$, $\vec b = -\vec m + 3\vec n$ и $\vec c = 5\vec m - \vec n$. Найти $\left|2\vec a\times\vec b - \dfrac12\vec c\times\vec b\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt{18}$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = \pi/4$.

23. Даны векторы $\vec a = \vec m - 2\vec n$, $\vec b = 5\vec m + 3\vec n$ и $\vec c = -\vec m + \vec n$. Найти $\left|\vec a\times\vec b - 3\vec c\times(\vec a + \vec b)\right|$, если $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = \sqrt8$, $(\vec m,\hat{\ }\vec n) = 3\pi/4$.

24. Даны векторы $\vec{p} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{q} = 7\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|(8\vec{p} - 2\vec{q}) \times \left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = 5\pi/6$.

25. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\left|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 3\pi/4$.

26. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$. Найти $\left|(3\vec{a} + 2\vec{b}) \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/4$.

27. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times (2\vec{a} + 3\vec{b})\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/3$.

28. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/6$.

29. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 4\vec{m} - 6\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$,, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/3$.

30. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -\vec{n} + 4\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/6$.

Задача 14. Даны координаты вершин пирамиды
$A(1,\ 1,\ 1)$; $B(5;\ 3;\ 1)$; $C(3;\ 2;\ 3)$; $D(-2,\ -1,\ 6)$.

1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AD}$.
2. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
3. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.
4. Найти площадь грани ABC.
5. Найти объем пирамиды ABCD.

Координаты векторов: $\overrightarrow{AB}\{4,\ 2,\ 0\}$; $\overrightarrow{AC}\{2,\ 1,\ 2\}$; $\overrightarrow{AD}\{-3,\ -2,\ 5\}$.

1. Длина вектора $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$.

2. $$\cos \overrightarrow{AB}, \hat{\ } \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}. \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 10;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

$$\cos \overrightarrow{AB}, \hat{\ } \overrightarrow{AC} = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \qquad \left(\overrightarrow{AB}, \hat{\ } \overrightarrow{AC}\right) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Проекция вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$: $\quad \text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\,\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 4\cdot(-3)+2(-2)+0\cdot 5 = -16; \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{5};$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\,\overrightarrow{AD} = -\frac{16}{2\sqrt{5}} = -\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

4. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|;\qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 0\cdot\vec{k} = 4\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right).$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{1^2+2^2} = 4\sqrt{5}; \qquad S_{ABC} = 2\sqrt{5}.$$

5. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right|;\qquad \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4. \quad V_{ABCD} = \dfrac{2}{3}.$

Контрольные варианты к задаче 14

Задача. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется найти:

1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;
2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
3) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) площадь грани ABC ;
5) объем пирамиды ABCD.

1. $A(-2;\ 0;\ 4)$, $\quad B(4;\ -3;\ -2)$, $\quad C(7;\ -2;\ 2)$, $\quad D(-1;\ 2;\ 6)$.